Listy Biometryczne
Vol. XXI (1984) No. 1,
Biometrical Letters

NAJKRÓTSZY PRZEDZIAŁ UFNOŚCI DLA ILORAZU WARIANCJI

RADOSŁAW KALA, KRZYSZTOF MOLIŃSKI

Zakład Metod Matematycznych i Statystycznych Akademii Rolniczej w Poznaniu

Praca wpłynęła 30 września 1983; w wersji ostatecznej 15 grudnia 1984

Kala R., Moliński K., (1984). Confidence interval with the minimal length for the ratio of variances. Listy Biometryczne XXI, z. 1, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu (Adam Mickiewicz University Press), pp.21-28, 5 tabl., PL ISSN 0458-0036.

The method of constructing the confidence interval with the minimal length for the ratio of the variances of two independent normal distributions is given. The discription of the method is supplemented by the appropriate tables of F distribution, an ilustrating example, and some remarks on the efficiency of the method proposed.

1. WSTĘP

W analizie danych eksperymentalnych niejednokrotnie wymaga się znalezienia ocen nieznanych parametrów z równoczesnym określeniem ich wiarogodności. W tych sytuacjach pomocne okazują się metody estymacji przedziałowej, w których ustaloną z góry pewność wniosków uzyskuje się dzięki zrezygnowaniu z jednoznacznych ocen punktowych na rzecz ocen przedziałowych, określanych mianem przedziałów ufności. Okazuje się jednak, że niektóre tradycyjne konstrukcje prowadzą do przedziałów o niepotrzebnie dużych długościach. Dzieje się tak w przypadku, gdy dość rozpowszechniona zasada równości prawdopodobieństw związanych z przekroczeniem przez szacowany parametr odpowiednio dolnej i górnej granicy przedziału, tzw. zasada "equal-tails", jest bezpośrednio przenoszona z konstrukcji opartych na zmiennych losowych o rozkładach symetrycznych na konstrukcje wykorzystujące rozkłady niesymetryczne.

W szczególności zastosowanie zasady "equal-tails" przy wyznaczaniu przedziału ufności dla wariancji σ^2 rozkładu normalnego, w której to konstrukcji znajduje zastosowanie rozkład chi-kwadrat, prowadzi, jak pokazali Tate i Klett (1959), do przedziału znacznie przekraczającego długość przedziału najkrótszego. Odpowiednie tablice rozkładu chi-kwadrat, umożliwiające praktyczne wyznaczanie przedziału ufności dla wariancji zgodnie z zasadą minimum długości, można znaleźć w pracy wymienionych autorów.

Praca niniejsza poświęcona jest metodzie konstrukcji najkrótszego przedziału ufności dla ilorazu wariancji σ_x^2/σ_y^2 dwóch niezależnych rozkładów normalnych. W pracy podano także odpowiednie tablice rozkładu $\underline{F}$, przykład ilustracyjny, a ponadto przeprowadzono dyskusję efektywności zaproponowanej metody.

2. PRZEDZIAŁ UFNOŚCI O MINIMALNEJ DŁUGOŚCI

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{N_x}$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_y}$ reprezentują niezależne zmienne losowe o jednakowych rozkładach normalnych, scharakteryzowanych odpowiednio wartościami oczekiwanymi μ_x oraz μ_y i wariancjami σ_x^2 oraz σ_y^2. Konstrukcja przedziału ufności dla ilorazu σ_x^2/σ_y^2 opiera się na statystyce F postaci

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \; \frac{S_y^2}{S_x^2}, \tag{1}$$

gdzie wielkość

$$S_x^2 = \sum_{i=1}^{N_x} (X_i - \overline{X})^2/n_x \quad \text{oraz} \quad S_y^2 = \sum_{i=1}^{N_y} (Y_i - \overline{Y})^2/n_y$$

są tzw. średnimi kwadratami, odpowiednio ze stopniami swobody $n_x = N_x - 1$ oraz $n_y = N_y - 1$, a

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{N_x} X_i / N_x \quad \text{oraz} \quad \overline{Y} = \sum_{i=1}^{N_y} Y_i / N_y$$

są odpowiednimi średnimi arytmetycznymi. Zmienna losowa F, jako iloraz dwóch niezależnych statystyk - każda o rozkładzie chi-kwadrat, ma rozkład $\underline{F}$ z n_y stopniami swobody dla licznika oraz n_x stopniami swobody dla mianownika. Dobierając zatem dwie liczby a oraz b tak, aby dla zadanego $\alpha \in (0, 1)$

$$\Pr(a \leqslant F \leqslant b) = 1 - \alpha, \tag{2}$$

otrzymamy równość

$$\Pr\left(a \frac{S_x^2}{S_y^2} \leqslant \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \leqslant b \frac{S_x^2}{S_y^2}\right) = 1 - \alpha, \tag{3}$$

umożliwiającą zapisanie $(1-\alpha)$ 100% przedziału ufności dla ilorazu σ_x^2/σ_y^2 w postaci

T a b l i c a 1. Wartości stałych a oraz b z rozkładu F do estymacji przedziałowej o min
Dla każdej kombinacji stopni swobody, n_1 dla licznika i n_2 dla mianownika, podano
stałą a stałą b
$\alpha_1 = Pr(F < a)$ $\alpha_2 = Pr(F > b)$

n2 \ n1	3		4		5		8	
2	.0000	99.1585	.0000	99.2480	.0003	99.2983	.0048	99.3781
	0.000000	0.010000	0.000000	0.010000	0.000000	0.010000	0.000000	0.010000
3	.0000	29.4558	.0001	28.7089	.0009	28.2369	.0108	27.4926
	0,000000	0.010000	0.000000	0.010000	0.000000	0.010001	0.000001	0.009999
4	.0000	16.6940	.0002	15.9770	.0018	15.5223	.0169	14,8034
	0.000000	0.010000	0.000000	0.010000	0.000001	0.009999	0.000006	0.009994
5	.0000	12.0596	.0003	11.3919	.0028	10.9683	.0226	10.2955
	0.000000	0.010000	0.000000	0.010000	0.000002	0.009998	0.000013	0.009987
6	.0000	9.7795	.0005	9.1484	.0038	8.7475	.0278	8.1091
	0.000000	0.010000	0.000001	0.009999	0.000004	0.009996	0.000023	0.009977
7	.0000	8.4512	.0007	7.8469	.0047	7.4624	.0324	6.8486
	0.000000	0.010000	0.000001	0.009999	0.000007	0.009993	0.000035	0.009965
8	.0000	7.5909	.0008	7.0065	.0056	6.6341	.0365	6.0386
	0.000000	0.010000	0.000002	0.009998	0.000010	0.009990	0.000049	0.009951
9	.0000	6.9918	.0010	6.4226	.0063	6.0595	.0402	5.4778
	0.000000	0.010000	0.000002	0.009998	0.000013	0.009987	0.000065	0.009935
10	.0000	6.5521	.0011	5.9949	.0071	5.6392	.0435	5.0682
	0.000000	0.010000	0.000003	0.009997	0.000017	0.009983	0.000080	0.009920
11	.0000	6.2167	.0013	5.6689	.0077	5.3192	.0464	4.7568
	0.000000	0.010000	0.000004	0.009996	0.000021	0.009979	0.000096	0.009904
12	.0000	5.9525	.0014	5.4126	.0083	5.0677	.0491	4.5125
	0.000000	0.010000	0.000005	0.009995	0.000024	0.009976	0.000112	0.009888
13	.0000	5.7393	.0015	5.2060	.0089	4.8652	.0515	4.3158
	0.000000	0.010000	0.000005	0.009995	0.000028	0.009972	0.000128	0.009872
14	.0000	5.5638	.0017	5.0361	.0094	4.6987	.0537	4.1543
	0.000000	0.010000	0.000006	0.009994	0.000035	0.009965	0.000143	0.009857
15	.0000	5.4168	.0018	4.8940	.0098	4.5596	.0557	4.0193
	0.000000	0.010000	0.000007	0.009993	0.000035	0.009965	0.000158	0.009842
16	.0000	5.2922	.0019	4.7735	.0103	4,4416	.0576	3.9049
	0.000000	0.010000	0.000008	0.009992	0.000038	0.009962	0.000173	0.009827
17	.0000	5.1850	.0020	4.6699	.0107	4.3403	.0593	3.8067
	0.000000	0.010000	0.000008	0.009992	0.000042	0.009958	0.000187	0.009813
18	.0000	5.0919	.0020	4.5800	.0110	4.2523	.0608	3.7216
	0.000000	0.010000	0.000009	0.009991	0.000045	0.009955	0.000200	0.009800
19	.0000	5.0102	.0021	4.5013	.0114	4.1754	.0622	3.6471
	0.000000	0.010000	0.000010	0.009990	0.000048	0.009952	0.000213	0.009787
20	.0000	4.9381	.0022	4.4317	.0117	4.1074	.0636	3.5813
	0.000000	0.010000	0.000011	0.009989	0.000051	0.009949	0.000226	0.009774
22	.0000	4.8166	.0023	4.3146	.0122	3.9929	.0660	3.4705
	0.000000	0.010000	0.000012	0.009988	0.000056	0.009944	0.000250	0.009750
24	.0000	4.7180	.0025	4.2196	.0127	3.9002	.0681	3.3809
	0.000000	0.010000	0.000013	0.009987	0.000062	0.009938	0.000272	0.009728
26	.0000	4.6365	.0026	4.1412	.0132	3.8237	.0699	3.3069
	0.000000	0.010000	0.000014	0.009986	0.000066	0.009934	0.000292	0.009708
28	.0000	4.5680	.0027	4.0753	.0136	3.7594	.0715	3.2448
	0.000000	0.010000	0.000015	0.009985	0.000071	0.009929	0.000311	0.009689
30	.0000	4.5097	.0027	4.0192	.0139	3.7046	.0730	3.1920
	0.000000	0.010000	0.000016	0.009984	0.000075	0.009925	0.000328	0.009672
40	.0000	4.3125	.0031	3.8298	.0153	3.5200	.0784	3.0137
	0.000000	0.010000	0.000020	0.009980	0.000091	0.009909	0.000397	0.009603
50	.0000	4.1993	.0033	3.7212	.0161	3.4142	.0819	2.9116
	0.000000	0.010000	0.000023	0.009977	0.000102	0.009898	0.000447	0.009553
60	.0000	4.1258	.0035	3.6507	.0167	3.3457	.0843	2.8455
	0.000000	0.010000	0.000025	0.009975	0.000111	0.009889	0.000484	0.009516

inimalnej długości; α = 0.01

10		15		20		25		3
.0096	99.4026	.0211	99.4435	.0296	99.4598	.0357	99.4726	.0402
0.000000	0.010000	0.000000	0.010000	0.000000	0.010000	0.000000	0.010000	0.000000
.0195	27.2330	.0383	26.8795	.0515	26.6982	.0607	26.5878	.0675
0.000002	0.009998	0.000003	0.009997	0.000004	0.009996	0.000004	0.009996	0.000004
.0291	14.5523	.0543	14.2076	.0715	14.0303	.0836	13.9220	.0923
0.000008	0.009992	0.000012	0.009988	0.000013	0.009987	0.000014	0.009986	0.000015
.0379	10.0594	.0686	9.7339	.0894	9.5657	.1038	9.4627	.1143
0.000019	0.009981	0.000027	0.009973	0.000030	0.009970	0.000032	0.009968	0.000033
.0457	7.8845	.0812	7.5727	.1051	7.4111	.1217	7.3119	.1338
0.000033	0.009967	0.000047	0.009953	0.000053	0.009947	0.000057	0.009943	0.000059
.0526	6.6317	.0924	6.3300	.1190	6.1727	.1375	6.0759	.1510
0.000050	0.009950	0.000072	0.009928	0.000082	0.009918	0.000087	0.009913	0.000090
.0587	5.8273	.1022	5.5326	.1314	5.3781	.1516	5.2830	.1664
0.000070	0.009930	0.000100	0.009900	0.000114	0.009886	0.000121	0.009879	0.000126
.0641	5.2709	.1110	4.9810	.1424	4.8286	.1642	4.7345	.1801
0.000091	0.009909	0.000130	0.009870	0.000149	0.009851	0.000159	0.009841	0.000165
.0690	4.8646	.1188	4.5783	.1522	4.4274	.1755	4.3340	.1925
0.000113	0.009887	0.000162	0.009838	0.000185	0,009815	0.000198	0.009802	0.000206
.0734	4.5557	.1259	4.2723	.1611	4.1224	.1856	4.0292	.2036
0.000136	0.009864	0.000194	0.009806	0.000223	0.009777	0.000239	0.009761	0.000249
.0773	4.3133	.1322	4.0321	.1691	3.8828	.1949	3.7899	.2138
0.000158	0.009842	0.000227	0.009773	0.000261	0.009739	0.000280	0.009720	0.000292
.0809	4.1183	.1380	3.8388	.1764	3.6900	.2033	3.5973	.2230
0.000180	0.009820	0.000260	0.009740	0.000300	0.009700	0.000322	0.009678	0.000335
.0841	3.9582	.1432	3.6800	.1830	3.5315	.2110	3.4388	.2315
0.000202	0.009798	0.000292	0.009708	0.000337	0.009663	0.000363	0.009637	0.000379
.0871	3.8243	.1480	3.5472	.1891	3.3990	.2180	3.3062	.2393
0.000224	0.009776	0.000324	0.009676	0.000375	0.009625	0.000404	0.009596	0.000422
.0898	3.7109	.1524	3.4347	.1947	3.2866	.2245	3.1937	.2464
0.000244	0.009796	0.000355	0.009645	0.000411	0.009589	0.000444	0.009556	0.000464
.0923	3.6136	.1565	3.3381	.1999	3.1900	.2305	3.0970	.2531
0.000265	0.009735	0.000385	0.009615	0.000447	0.009553	0.000483	0.009517	0.000505
.0945	3.5292	.1602	3.2543	.2047	3.1063	.2360	3.0130	.2592
0.000284	0.009716	0.000414	0.009586	0.000482	0.009518	0.000521	0.009479	0.000546
.0967	3.4553	.1637	3.1809	.2091	3.0328	.2412	2.9395	.2650
0.000303	0.009697	0.000442	0.009558	0.000516	0.009484	0.000558	0.009442	0.000586
.0986	3.3901	.1669	3.1161	.2132	2.9680	.2460	2.8744	.2703
0.000321	0.009679	0.000470	0.009530	0.000548	0.009452	0.000595	0.009405	0.000624
.1021	3.2803	.1727	3.0069	.2207	2.8586	.2547	2.7647	.2800
0.000355	0.009645	0.000522	0.009478	0.000611	0.009389	0.000664	0.009336	0.000698
.1052	3.1914	.1777	2.9184	.2272	2.7699	.2624	2.6757	.2886
0.000387	0.009613	0.000570	0.009430	0.000670	0.009330	0.000729	0.009271	0.000768
.1079	3.1181	.1822	2.8453	.2330	2.6966	.2692	2.6020	.2962
0.000416	0.009584	0.000615	0.009385	0.000725	0.009275	0.000791	0.009209	0.000833
.1103	3.0565	.1862	2.7839	.2381	2.6349	.2752	2.5400	.3029
0.000443	0.009557	0.000657	0.009343	0.000776	0.009224	0.000848	0.009152	0.000895
.1125	3.0040	.1897	2.7316	.2427	2.5824	.2807	2.4870	.3091
0.000468	0.009532	0.000696	0.009304	0.000824	0.009176	0.000902	0.009098	0.000953
.1204	2.8271	.2030	2.5550	.2601	2.4044	.3013	2.3077	.3323
0.000569	0.009431	0.000856	0.009144	0.001021	0.008979	0.001125	0.008875	0.001195
.1256	2.7258	.2117	2.4535	.2715	2.3019	.3150	2.2040	.3479
0.000642	0.009358	0.000972	0.009028	0.001167	0.008833	0.001291	0.008709	0.001376
.1292	2.6601	.2178	2.3877	.2796	2.2353	.3247	2.1364	.3590
0.000696	0.009304	0.001060	0.008940	0.001278	0.008722	0.001419	0.008581	0.001517

	20		25		30		60	
35	.0296	99.4598	.0357	99.4726	.0402	99.4795	.0532	99.4938
00	0.000000	0.010000	0.000000	0.010000	0.000000	0.010000	0.000000	0.010000
95	.0515	26.6982	.0607	26.5878	.0675	26.5139	.0866	26.3250
97	0.000004	0.009996	0.000004	0.009996	0.000004	0.009996	0.000005	0.009995
76	.0715	14.0303	.0836	13.9220	.0923	13.8492	.1169	13.6641
88	0.000013	0.009987	0.000014	0.009986	0.000015	0.009985	0.000016	0.009984
39	.0894	9.5657	.1038	9.4627	.1143	9.3933	.1438	9.2164
73	0.000030	0.009970	0.000032	0.009968	0.000033	0.009967	0.000035	0.009965
27	.1051	7.4111	.1217	7.3119	.1338	7.2448	.1678	7.0735
53	0.000053	0.009947	0.000057	0.009943	0.000059	0.009941	0.000062	0.009938
00	.1190	6.1727	.1375	6.0759	.1510	6.0104	.1891	5.8423
28	0.000082	0.009918	0.000087	0.009913	0.000090	0.009910	0.000096	0.009904
26	.1314	5.3781	.1516	5.2830	.1664	5.2184	.2081	5.0523
00	0.000114	0.009886	0.000121	0.009879	0.000126	0.009874	0.000134	0.009866
10	.1424	4.8286	.1642	4.7345	.1801	4.6704	.2253	4.5053
70	0.000149	0.009851	0.000159	0.009841	0.000165	0.009835	0.000176	0.009824
33	.1522	4.4274	.1755	4.3340	.1925	4.2701	.2408	4.1054
38	0.000185	0,009815	0.000198	0.009802	0.000206	0.009794	0.000221	0.009779
23	.1611	4.1224	.1856	4.0292	.2036	3.9657	.2549	3.8008
06	0.000223	0.009777	0.000239	0.009761	0.000249	0.009751	0.000268	0.009732
21	.1691	3.8828	.1949	3.7899	.2138	3.7264	.2678	3.5613
73	0.000261	0.009739	0.000280	0.009720	0.000292	0.009708	0.000315	0.009685
38	.1764	3.6900	.2033	3.5973	.2230	3.5337	.2796	3.3680
40	0.000300	0.009700	0.000322	0.009678	0.000335	0.009665	0.000363	0.009637
00	.1830	3.5315	.2110	3.4388	.2315	3.3751	.2905	3.2088
98	0.000337	0.009663	0.000363	0.009637	0.000379	0.009621	0.000411	0.009589
2	.1891	3.3990	.2180	3.3062	.2393	3.2424	.3006	3.0755
6	0.000375	0.009625	0.000404	0.009596	0.000422	0.009578	0.000458	0.009542
7	.1947	3.2866	.2245	3.1937	.2464	3.1298	.3099	2.9620
5	0.000411	0.009589	0.000444	0.009556	0.000464	0.009536	0.000506	0.009494
1	.1999	3.1900	.2305	3.0970	.2531	3.0330	.3186	2.8643
5	0.000447	0.009553	0.000483	0.009517	0.000505	0.009495	0.000552	0.009448
3	.2047	3.1063	.2360	3.0130	.2592	2.9488	.3267	2.7794
6	0.000482	0.009518	0.000521	0.009479	0.000546	0.009454	0.000598	0.009402
9	.2091	3.0328	.2412	2.9395	.2650	2.8750	.3342	2.7047
8	0.000516	0.009484	0.000558	0.009442	0.000586	0.009414	0.000643	0.009357
1	.2132	2.9680	.2460	2.8744	.2703	2.8098	.3413	2.6386
0	0.000548	0.009452	0.000595	0.009405	0.000624	0.009376	0.000686	0.009314
9	.2207	2.8586	.2547	2.7647	.2800	2.6997	.3542	2.5268
8	0.000611	0.009389	0.000664	0.009336	0.000698	0.009302	0.000771	0.009229
4	.2272	2.7699	.2624	2.6757	.2886	2.6103	.3657	2.4357
0	0.000670	0.009330	0.000729	0.009271	0.000768	0.009232	0.000851	0.009149
3	.2330	2.6966	.2692	2.6020	.2962	2.5362	.3760	2.3600
5	0.000725	0.009275	0.000791	0.009209	0.000833	0.009167	0.000928	0.009072
9	.2381	2.6349	.2752	2.5400	.3029	2.4739	.3853	2.2961
3	0.000776	0.009224	0.000848	0.009152	0.000895	0.009105	0.001000	0.009000
6	.2427	2.5824	.2807	2.4870	.3091	2.4206	.3937	2.2413
4	0.000824	0.009176	0.000902	0.009098	0.000953	0.009047	0.001068	0.008932
0	.2601	2.4044	.3013	2.3077	.3323	2.2397	.4263	2.0541
4	0.001021	0.008979	0.001125	0.008875	0.001195	0.008805	0.001359	0.008641
5	.2715	2.3019	.3150	2.2040	.3479	2.1348	.4487	1.9442
8	0.001167	0.008833	0.001291	0.008709	0.001376	0.008624	0.001584	0.008416
7	.2796	2.2353	.3247	2.1364	.3590	2.0663	.4651	1.8717
0	0.001278	0.008722	0.001419	0.008581	0.001517	0.008483	0.001762	0.008238

T a b l i c a 2. Wartości stałych a oraz b z rozkładu F do estymacji przedziałowej o min
Dla każdej kombinacji stopni swobody, n_1 dla licznika i n_2 dla mianownika, podano

stała a — stałą b

$\alpha_1 = Pr(F < a)$ — $\alpha_2 = Pr(F > b)$

n2 \ n1	3		4		5		8	
2	.0000	19.1640	.0003	19.2467	.0022	19.2972	.0148	19.3751
	0.000000	0.050000	0.000000	0.050000	0.000002	0.049998	0.000010	0.049990
3	.0000	9.2765	.0011	9.1176	.0057	9.0157	.0285	8.8531
	0.000000	0.050000	0.000004	0.049996	0.000017	0.049983	0.000060	0.049940
4	.0000	6.5914	.0022	6.3893	.0094	6.2599	.0413	6.0524
	0.000000	0.050000	0.000014	0.049986	0.000051	0.049949	0.000159	0.049841
5	.0001	5.4094	.0033	5.1938	.0130	5.0556	.0526	4.8329
	0.000001	0.049999	0.000030	0.049970	0.000101	0.049899	0.000298	0.049702
6	.0001	4.7571	.0044	4.5359	.0163	4.3940	.0625	4.1642
	0.000001	0.049999	0.000050	0.049950	0.000161	0.049839	0.000462	0.049538
7	.0001	4.3469	.0054	4.1230	.0193	3.9794	.0711	3.7456
	0.000002	0.049998	0.000074	0.049926	0.000228	0.049772	0.000639	0.049361
8	.0002	4.0663	.0063	3.8410	.0219	3.6965	.0785	3.4601
	0.000003	0.049997	0.000098	0.049902	0.000297	0.049703	0.000822	0.049178
9	.0002	3.8627	.0072	3.6367	.0242	3.4916	.0851	3.2534
	0.000004	0.049996	0.000123	0.049877	0.000367	0.049633	0.001005	0.048995
10	.0002	3.7084	.0079	3.4820	.0263	3.3366	.0909	3.0971
	0.000005	0.049995	0.000149	0.049851	0.000435	0.049565	0.001183	0.048817
11	.0003	3.5876	.0086	3.3610	.0282	3.2154	.0960	2.9749
	0.000006	0.049994	0.000173	0.049827	0.000501	0.049499	0.001356	0.048644
12	.0003	3.4905	.0093	3.2638	.0299	3.1181	.1006	2.8768
	0.000007	0.049993	0.000197	0.049803	0.000565	0.049435	0.001522	0.048478
13	.0003	3.4107	.0098	3.1841	.0314	3.0383	.1047	2.7963
	0.000008	0.049992	0.000220	0.049780	0.000625	0.049375	0.001680	0.048320
14	.0003	3.3441	.0104	3.1175	.0328	2.9717	.1084	2.7291
	0.000009	0.049991	0.000241	0.049759	0.000683	0.049317	0.001830	0.048170
15	.0004	3.2876	.0109	3.0610	.0340	2.9152	.1118	2.6721
	0.000010	0.049990	0.000262	0.049738	0.000737	0.049263	0.001973	0.048027
16	.0004	3.2391	.0113	3.0126	.0352	2.8668	.1149	2.6233
	0.000011	0.049989	0.000282	0.049718	0.000788	0.049212	0.002108	0.047892
17	.0004	3.1970	.0117	2.9706	.0362	2.8248	.1177	2.5809
	0.000012	0.049988	0.000301	0.049699	0.000837	0.049163	0.002235	0.047765
18	.0004	3.1602	.0121	2.9338	.0372	2.7881	.1202	2.5438
	0.000013	0.049987	0.000318	0.049682	0.000883	0.049117	0.002356	0.047644
19	.0005	3.1276	.0124	2.9014	.0380	2.7556	.1226	2.5111
	0.000014	0.049986	0.000335	0.049665	0.000927	0.049073	0.002471	0.047529
20	.0005	3.0987	.0128	2.8725	.0389	2.7268	.1247	2.4820
	0.000015	0.049985	0.000351	0.049649	0.000968	0.049032	0.002579	0.047421
22	.0005	3.0495	.0133	2.8234	.0403	2.6778	.1286	2.4324
	0.000017	0.049983	0.000380	0.049620	0.001044	0.048956	0.002779	0.047221
24	.0005	3.0091	.0139	2.7833	.0416	2.6377	.1320	2.3919
	0.000018	0.049982	0.000407	0.049593	0.001112	0.048888	0.002959	0.047041
26	.0006	2.9755	.0143	2.7498	.0427	2.6043	.1349	2.3582
	0.000019	0.049981	0.000431	0.049569	0.001174	0.048826	0.003122	0.046878
28	.0006	2.9471	.0147	2.7215	.0437	2.5760	.1375	2.3296
	0.000021	0.049979	0.000453	0.049547	0.001229	0.048771	0.003269	0.046731
30	.0006	2.9227	.0151	2.6972	.0445	2.5518	.1398	2.3051
	0.000022	0.049978	0.000472	0.049528	0.001280	0.048720	0.003404	0.046596
40	.0007	2.8392	.0164	2.6142	.0478	2.4690	.1482	2.2213
	0.000026	0.049974	0.000549	0.049451	0.001475	0.048525	0.003925	0.046075
50	.0008	2.7905	.0172	2.5658	.0498	2.4208	.1536	2.1725
	0.000030	0.049970	0.000602	0.049398	0.001608	0.048392	0.004280	0.045720
60	.0008	2.7586	.0178	2.5342	.0513	2.3892	.1574	2.1405
	0.000032	0.049968	0.000640	0.049360	0.001704	0.048296	0.004537	0.045463

inimalnej długości; $\alpha = 0.05$

10		15		20		25		
.0236	19.4014	.0403	19.4364	.0510	19.4537	.0581	19.4642	.063
0.000013	0.049987	0.000017	0.049983	0.000019	0.049981	0.000020	0.049980	0.00002
.0427	8.7954	.0681	8.7153	.0839	8.6736	.0944	8.6480	.101
0.000077	0.049923	0.000098	0.049902	0.000107	0.049893	0.000111	0.049889	0.00011
.0600	5.9785	.0928	5.8752	.1129	5.8211	.1262	5.7878	.135
0.000202	0.049798	0.000254	0.049746	0.000276	0.049724	0.000287	0.049713	0.00029
.0751	4.7529	.1141	4.6403	.1380	4.5811	.1538	4.5444	.165
0.000375	0.049625	0.000471	0.049529	0.000511	0.049489	0.000532	0.049468	0.00054
.0882	4.0810	.1326	3.9633	.1597	3.9009	.1776	3.8621	.190
0.000580	0.049420	0.000728	0.049272	0.000791	0.049209	0.000823	0.049177	0.00084
.0996	3.6604	.1486	3.5391	.1785	3.4744	.1983	3.4341	.212
0.000802	0.049198	0.001008	0.048992	0.001098	0.048902	0.001144	0.048856	0.00117
.1094	3.3735	.1625	3.2494	.1949	3.1829	.2164	3.1414	.231
0.001031	0.048969	0.001299	0.048701	0.001417	0.048583	0.001478	0.048522	0.00151
.1181	3.1657	.1747	3.0394	.2094	2.9714	.2324	2.9287	.248
0.001260	0.048740	0.001592	0.048408	0.001740	0.048260	0.001818	0.048182	0.00186
.1257	3.0085	.1855	2.8804	.2221	2.8110	.2466	2.7673	.264
0.001485	0.048515	0.001882	0.048118	0.002061	0.047939	0.002156	0.047844	0.00221
.1325	2.8855	.1951	2.7558	.2335	2.6852	.2592	2.6406	.277
0.001703	0.048297	0.002165	0.047835	0.002375	0.047625	0.002488	0.047512	0.00255
.1386	2.7867	.2037	2.6555	.2438	2.5839	.2706	2.5385	.289
0.001913	0.048087	0.002438	0.047562	0.002680	0.047320	0.002811	0.047189	0.00289
.1440	2.7057	.2114	2.5732	.2530	2.5005	.2808	2.4544	.300
0.002114	0.047886	0.002701	0.047299	0.002975	0.047025	0.003124	0.046876	0.00321
.1489	2.6379	.2184	2.5043	.2613	2.4307	.2901	2.3840	.310
0.002305	0.047695	0.002952	0.047048	0.003258	0.046742	0.003425	0.046575	0.00352
.1533	2.5805	.2248	2.4458	.2689	2.3715	.2986	2.3241	.319
0.002487	0.047513	0.003193	0.046807	0.003529	0.046471	0.003714	0.046286	0.00382
.1573	2.5313	.2305	2.3956	.2758	2.3205	.3063	2.2725	.328
0.002659	0.047341	0.003422	0.046578	0.003788	0.046212	0.003991	0.046009	0.00411
.1610	2.4885	.2358	2.3519	.2822	2.2761	.3135	2.2276	.336
0.002823	0.047177	0.003640	0.046360	0.004036	0.045964	0.004251	0.045743	0.00439
.1644	2.4511	.2407	2.3137	.2880	2.2372	.3200	2.1881	.343
0.002978	0.047022	0.003848	0.046152	0.004272	0.045728	0.004511	0.045489	0.00465
.1675	2.4180	.2451	2.2798	.2934	2.2027	.3261	2.1532	.349
0.003125	0.046875	0.004045	0.045955	0.004498	0.045502	0.004754	0.045246	0.00491
.1704	2.3886	.2493	2.2497	.2984	2.1720	.3317	2.1220	.355
0.003264	0.046736	0.004234	0.045766	0.004713	0.045287	0.004986	0.045014	0.00515
.1755	2.3386	.2567	2.1984	.3074	2.1197	.3418	2.0688	.366
0.003522	0.046478	0.004583	0.045417	0.005115	0.044885	0.005420	0.044580	0.00561
.1799	2.2976	.2631	2.1563	.3152	2.0766	.3507	2.0250	.376
0.003755	0.046245	0.004901	0.045099	0.005482	0.044518	0.005818	0.044182	0.00603
.1838	2.2634	.2688	2.1211	.3221	2.0406	.3585	1.9883	.384
0.003966	0.046034	0.005191	0.044809	0.005817	0.044183	0.006183	0.043817	0.00641
.1873	2.2345	.2737	2.0913	.3281	2.0100	.3654	1.9571	.392
0.004157	0.045843	0.005455	0.044545	0.006125	0.043875	0.006519	0.043481	0.00677
.1903	2.2097	.2782	2.0657	.3336	1.9837	.3716	1.9302	.399
0.004332	0.045668	0.005697	0.044303	0.006407	0.043593	0.006828	0.043172	0.00709
.2015	2.1247	.2946	1.9777	.3538	1.8930	.3947	1.8373	.424
0.005013	0.044987	0.006651	0.043349	0.007530	0.042470	0.008065	0.041935	0.00841
.2087	2.0751	.3053	1.9260	.3670	1.8395	.4098	1.7822	.441
0.005481	0.044519	0.007315	0.042685	0.008321	0.041679	0.008945	0.041055	0.00936
.2137	2.0426	.3127	1.8920	.3762	1.8042	.4205	1.7457	.453
0.005821	0.044179	0.007801	0.042199	0.008906	0.041094	0.009600	0.040400	0.01007

	20		25		30		60	
4364	.0510	19.4537	.0581	19.4642	.0633	19.4708	.0773	19.4878
9983	0.000019	0.049981	0.000020	0.049980	0.000021	0.049979	0.000021	0.049979
7153	.0839	8.6736	.0944	8.6480	.1018	8.6307	.1220	8.5865
9902	0.000107	0.049893	0.000111	0.049889	0.000113	0.049887	0.000118	0.049882
8752	.1129	5.8211	.1262	5.7878	.1357	5.7652	.1613	5.7075
9746	0.000276	0.049724	0.000287	0.049713	0.000293	0.049707	0.000304	0.049696
6403	.1380	4.5811	.1538	4.5444	.1650	4.5195	.1953	4.4556
9529	0.000511	0.049489	0.000532	0.049468	0.000543	0.049457	0.000564	0.049436
9633	.1597	3.9009	.1776	3.8621	.1903	3.8357	.2249	3.7676
9272	0.000791	0.049209	0.000823	0.049177	0.000842	0,049158	0.000876	0.049124
5391	.1785	3.4744	.1983	3.4341	.2124	3.4066	.2508	3.3352
8992	0.001098	0.048902	0.001144	0.048856	0.001170	0.048830	0.001220	0.048780
2494	.1949	3.1829	.2164	3.1414	.2317	3.1129	.2736	3.0387
8701	0.001417	0.048583	0.001478	0.048522	0.001514	0.048486	0.001582	0.048418
0394	.2094	2.9714	.2324	2.9287	.2488	2.8994	.2938	2.8229
8408	0.001740	0.048260	0.001818	0.048182	0.001864	0.048136	0.001951	0.048049
8804	.2221	2.8110	.2466	2.7673	.2640	2.7373	.3118	2.6585
8118	0.002061	0.047939	0.002156	0.047844	0.002213	0.047787	0.002321	0.047679
7558	.2335	2.6852	.2592	2.6406	.2775	2.6099	.3281	2.5291
7835	0.002375	0.047625	0.002488	0.047512	0.002556	0.047444	0.002686	0.047314
6555	.2438	2.5839	.2706	2.5385	.2897	2.5072	.3427	2.4244
7562	0.002680	0.047320	0.002811	0.047189	0.002890	0.047110	0.003044	0.046956
5732	.2530	2.5005	.2808	2.4544	.3008	2.4225	.3560	2.3380
7299	0.002975	0.047025	0.003124	0.046876	0.003214	0.046786	0.003392	0.046608
5043	.2613	2.4307	.2901	2.3840	.3108	2.3515	.3682	2.2653
7048	0.003258	0.046742	0.003425	0.046575	0.003527	0.046473	0.003729	0.046271
4458	.2689	2.3715	.2986	2.3241	.3199	2.2911	.3793	2.2033
6807	0.003529	0.046471	0.003714	0.046286	0.003827	0.046173	0.004055	0.045945
3956	.2758	2.3205	.3063	2.2725	.3283	2.2391	.3896	2.1497
6578	0.003788	0.046212	0.003991	0.046009	0.004116	0.045884	0.004370	0.045630
3519	.2822	2.2761	.3135	2.2276	.3360	2.1937	.3991	2.1030
6360	0.004036	0.045964	0.004251	0.045743	0.004393	0.045607	0.004672	0.045328
3137	.2880	2.2372	.3200	2.1881	.3431	2.1538	.4078	2.0618
6152	0.004272	0.045728	0.004511	0.045489	0.004659	0.045341	0.004963	0.045037
2798	.2934	2.2027	.3261	2.1532	.3497	2.1185	.4160	2.0252
5955	0.004498	0.045502	0.004754	0.045246	0.004913	0.045087	0.005243	0.044757
2497	.2984	2.1720	.3317	2.1220	.3558	2.0870	.4236	1.9924
5766	0.004713	0.045287	0.004986	0.045014	0.005156	0.044844	0.005512	0.044488
1984	.3074	2.1197	.3418	2.0688	.3668	2.0331	.4374	1.9362
5417	0.005115	0.044885	0.005420	0.044580	0.005612	0.044388	0.006019	0.043981
1563	.3152	2.0766	.3507	2.0250	.3764	1.9887	.4496	1.8897
5099	0.005482	0.044518	0.005818	0.044182	0.006031	0.043969	0.006488	0.043512
1211	.3221	2.0406	.3585	1.9883	.3849	1.9514	.4604	1.8505
4809	0.005817	0.044183	0.006183	0.043817	0.006416	0.043584	0.006922	0.043078
0913	.3281	2.0100	.3654	1.9571	.3925	1.9197	.4701	1.8170
4545	0.006125	0.043875	0.006519	0.043481	0.006771	0.043229	0.007325	0.042675
0657	.3336	1.9837	.3716	1.9302	.3992	1.8923	.4788	1.7880
4303	0.006407	0.043593	0.006828	0.043172	0.007099	0.042901	0.007700	0.042300
9777	.3538	1.8930	.3947	1.8373	.4247	1.7975	.5122	1.6863
3349	0.007530	0.042470	0.008065	0.041935	0.008418	0.041582	0.009233	0.040767
9260	.3670	1.8395	.4098	1.7822	.4415	1.7411	.5347	1.6249
2685	0.008321	0.041679	0.008945	0.041055	0.009363	0.040637	0.010362	0.039638
8920	.3762	1.8042	.4205	1.7457	.4534	1.7037	.5509	1.5835
2199	0.008906	0.041094	0.009600	0.040400	0.010071	0.039929	0.011228	0.038772

$$I = \left[a \frac{S_x^2}{S_y^2},\ b \frac{S_x^2}{S_y^2} \right]. \tag{4}$$

Z uwagi na to, że warunek (2) nie wyznacza stałych a oraz b jednoznacznie, wzór (4), przy ustalonym prawdopodobieństwie α, określa nie pojedynczy przedział ufności lecz całą ich rodzinę. Tradycyjnym sposobem ujednoznacznienia stałych a oraz b (patrz Roussas 1973, s. 347) jest przyjęcie dodatkowego warunku określonego mianem "equal-tails", a wyrażającego się równością

$$\Pr(F > b) = \Pr(F < a). \tag{5}$$

Postępowanie to prowadzi w konsekwencji do dobrze znanego przedziału ufności o postaci

$$I_{ET} = \left[\underline{F}^{n_y}_{n_x}; 1-\alpha/2 \frac{S_x^2}{S_y^2},\ \underline{F}^{n_y}_{n_x}; \alpha/2 \frac{S_x^2}{S_y^2} \right],$$

gdzie

$$\underline{F}^{n_y}_{n_x}; 1-\alpha/2 = a \quad \text{oraz} \quad \underline{F}^{n_y}_{n_x}; \alpha/2 = b \tag{6}$$

są odpowiednio górnym i dolnym $\alpha/2$-kwantylem rozkładu $\underline{F}$ z n_y stopniami swobody dla licznika i n_x stopniami swobody dla mianownika. Określone w (6) stałe a oraz b odczytuje się z powszechnie dostępnych tablic rozkładu $\underline{F}$, korzystając ponadto z dobrze znanej zależności

$$\underline{F}^{n_y}_{n_x}; 1-\alpha/2 = 1 / \underline{F}^{n_x}_{n_y}; \alpha/2 .$$

Z uwagi na niesymetrię rozkładu $\underline{F}$, stanowiącego podstawę konstrukcji rodziny przydziałów (4), przyjęcie warunku (5) nie zapewnia, że tradycyjny przedział I_{ET} będzie miał najmniejszą długość. Tym samym, z estymacyjnego punktu widzenia, ustalenie stałych a oraz b w oparciu o standardowe tablice rozkładu $\underline{F}$, tj. przyjęcie równości (6), choć wygodne w działaniach praktycznych, nie prowadzi do przedziałów o pożądanej własności.

Problem wyznaczenia najkrótszego przedziału ufności spośród rodziny (4) polega na dobraniu takich wartości a oraz b związanych zależnością (2), aby długość przedziału I, wyrażająca się wzorem

$$l(I) = (b-a) \frac{S_x^2}{S_y^2},$$

osiągała minimum.

Jeżeli przez f(t) oznaczymy funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu $\underline{F}$ przy ustalonej liczbie stopni swobody n_y dla licznika oraz n_x dla mianownika, to warunek (2) wyrazi się równoważnie równością

$$\int_a^b f(t)dt = 1-\alpha,$$

a rozwiązywane zagadnienie sprowadzi się do minimalizacji funkcji

$$L(a,b,\lambda) = (b-a)\frac{S_x^2}{S_y^2} + \lambda\left[\int_a^b f(t)\,dt - (1-\alpha)\right],$$

gdzie λ jest mnożnikiem Lagrange'a. Poszukując punktu stacjonarnego funkcji $L(a,b,\lambda)$ otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ \int_a^b f(t)\,dt = 1-\alpha, \end{cases} \tag{7}$$

określający optymalny dobór stałych a oraz b. Wartości tych stałych dla 270 kombinacji stopni swobody n_y i n_x oraz dla współczynników ufności $1-\alpha = 0.99$ i 0.95 zestawiono w tablicach 1 i 2, gdzie ponadto podano wartości prawdopodobieństw $Pr(F < a) = \alpha_1$ oraz $Pr(F > b) = \alpha_2$ ($\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$), pozwalające ocenić różnicę pomiędzy proponowaną metodą konstrukcji przedziałów ufności dla ilorazu σ_x^2/σ_y^2 a metodą tradycyjną, opartą o zasadę "equal-tails" ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$).

3. PRZYKŁAD I DYSKUSJA

Pomijając naturalną możliwość bezpośredniego zilustrowania przedstawionej metody konstrukcji przedziału ufności w oparciu o dane eksperymentalne pochodzące z dwóch populacji normalnych o nieznanych parametrach, pokażemy, jak zawarte w tablicach 1 i 2 wartości mogą być wykorzystane w analizie bardziej złożonego eksperymentu.

W latach 1970-1979 na zwierzętach Okręgowego Przedsiębiorstwa Hodowli Zwierząt Zarodowych w Dobrzyniewie i Garzynie przeprowadzono doświadczenie, polegające na badaniu wpływu "pochodzenia" na zawartość tłuszczu w mleku krów rasy czarno-białej w okresie pierwszej laktacji. W wyniku eksperymentu określono ilości tłuszczu w mleku uzyskanym od 35 krów stanowiących 5 równolicznych grup, z których każda pochodziła od tego samego z pięciu losowo wybranych buhajów (ojców). Uzyskane obserwacje zawiera tablica 3.

Za podstawę analizy opisanego eksperymentu przyjęto zrównoważony model losowy klasyfikacji pojedynczej

$$Y_{ij} = \mu + b_i + c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, 5, \quad j = 1, \ldots, 7,$$

gdzie Y_{ij} reprezentuje badaną cechę u j-tej krowy (córki) pochodzącej od i-tego buhaja (ojca), μ jest wartością oczekiwaną wspólną wszystkim zmiennym losowym Y_{ij}, a b_i oraz c_{ij} są efektami losowymi o zerowych wartościach oczekiwanych i wariancjach równych odpowiednio σ_b^2 oraz σ_c^2. Dodatkowo przyjęto założenie o normalności obserwowanych zmiennych lo-

T a b l i c a 3. Zawartość tłuszczu (w kg) w mleku krów rasy czarno-białej w zależności od pochodzenia

Córka \ Ojciec	1	2	3	4	5
1	183	156	180	141	198
2	147	170	121	154	195
3	147	145	148	132	170
4	153	128	189	156	182
5	160	170	171	130	174
6	196	170	174	167	197
7	157	159	158	177	203

sowych. W rezultacie analizy wariancji (patrz Scheffé 1959, s. 59 lub Elandt 1964, s. 150) uzyskano wyniki zawarte w tablicy 4.

T a b l i c a 4. Analiza wariancji dla danych w tablicy 3

Źródło zmienności	Stopnie swobody	Sumy kwadratów SS	Średnie kwadraty MS	Wartości oczekiwane MS
Obiekty (buhaje)	4	5718.75	1429.69	$\sigma_c^2 + 7\sigma_b^2$
Błąd (córki)	30	9684.00	322.80	σ_c^2

Pomijając wnioski szczegółowe, jakie mogą być sformułowane w oparciu o tablicę 4, przejdziemy do zagadnienia wyznaczania przedziału ufności dla ilorazu σ_b^2 / σ_c^2, co niejednokrotnie stanowi istotny element analizy (patrz Scheffé 1959, s. 229). Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że konstruowane przedziały mają mieć ufność 99%, czyli że współczynnik $\alpha = 0.01$.

W rozwiązaniu wykorzystamy średni kwadrat dla obiektów MS_b oraz średni kwadrat dla błędu MS_c, których odpowiednio wyskalowany iloraz

$$F = \frac{7\sigma_b^2 + \sigma_c^2}{\sigma_c^2} \; \frac{MS_c}{MS_b} = \left(7\frac{\sigma_b^2}{\sigma_c^2} + 1\right)\frac{MS_c}{MS_b} \tag{8}$$

ma rozkład $\underline{F}$ z 30 stopniami swobody dla licznika i 4 stopniami swobody dla mianownika.

Dobierając zgodnie z tradycyjną zasadą "equal-tails" dwie stałe

$$a = \underline{F}^{30}_{4;0.995} = \frac{1}{\underline{F}^{4}_{30;0.005}} = \frac{1}{4.62} = 0.2165$$

oraz

$$b = F^{30}_{4;0.005} = 19.9$$

możemy napisać równość

$$Pr\ (0.2165 \leqslant (7\frac{\sigma_b^2}{\sigma_c^2} + 1)\ \frac{MS_c}{MS_b} \leqslant 19.9) = 0.99,$$

która po uwzględnieniu uwidocznionych w tablicy 4 wartości statystyk MS_c i MS_b prowadzi do następującego przedziału

$$I_{ET} = \left[\frac{1}{7}\ (\frac{1429.69}{322.80}\ 0.2165 - 1),\ \frac{1}{7}(\frac{1429.69}{322.80}\ 19.9-1)\right] \qquad (9)$$
$$= [-0.0059,\quad 12.4482].$$

Z uwagi na nieujemność ilorazu komponentów σ_b^2 i σ_c^2 przedział (9) należy jeszcze zmodyfikować zastępując zerem lewą jego granicę, która okazała się ujemna (bliższe uzasadnienie takiego postępowania znaleźć można w monografii Coxa i Hinkleya 1974, s. 224). Ostatecznie tradycyjny 99% przedział ufności dla ilorazu σ_b^2 / σ_c^2 przyjmuje postać

$$I_{ET} = [0,\quad 12.4482].$$

W celu skonstruowania przedziału ufności o minimalnej długości I_{ML} posłużymy się również statystyką (8). Stałe a oraz b, spełniające warunki optymalności (7), a odczytane z tablicy 1 ($\alpha = 0.01$) dla 30 stopni swobody dla licznika i 4 stopni swobody dla mianownika, wynoszą teraz odpowiednio

$$a = 0.0923 \text{ oraz } b = 13.8492.$$

W rezultacie możemy napisać równość

$$Pr\left(0.0923 \leqslant \left(7\frac{\sigma_b^2}{\sigma_c^2} + 1\right)\frac{MS_c}{MS_b} \leqslant 13.8492\right) = 0.99,$$

która prowadzi do przedziału ufności

$$I_{ML} = [-0.0845,\quad 8.6198].$$

Zastępując lewą jego granicę zerem, zgodnie z zasadą wykorzystaną już przy wyznaczaniu przedziału I_{ET}, poszukiwany przedział o minimalnej długości przyjmie postać

$$I_{ML} = [0,\quad 8.6198].$$

Analogiczne obliczenia wykonane przy współczynniku ufności 0.95 prowadzą do przedziałów

$$I_{ET} = [0.0518,\quad 5.2099]$$

oraz

$$I_{ML} = [0\quad,\quad 3.5049].$$

Podsumowując otrzymane wyniki warto obliczyć iloraz długości wyznaczonych przedziałów $\delta = l(I_{ML}) / l(I_{ET})$. W przypadku przedziałów 99% iloraz ten wynosi 0.6925, a w przypadku przedziałów 95% - 0.6795. Tak więc zaproponowana metoda pozwoliła skrócić długość przedziału ufności o ponad 30%.

Ponieważ - za wyjątkiem takich sytuacji jak w omawianym przykładzie, gdy lewą granicę przedziału ufności należało zastąpić zerem - iloraz δ nie zależy od wartości średnich kwadratów, można więc sformułować bardziej ogólne wnioski dotyczące efektywności zaproponowanej metody. W tym celu dla różnych kombinacji stopni swobody wyznaczono wartości ilorazu δ na podstawie wartości odczytanych ze standardowych tablic rozkładu $\underline{F}$ (patrz np. Scheffé 1959; lub Hald 1952) oraz z tablic 1 i 2 prezentowanych w pracy. Rezultaty tych obliczeń zestawiono w tablicy 5.

T a b l i c a 5. Wartości ilorazu δ dla różnych kombinacji stopni swobody n_1 dla licznika i n_2 dla mianownika przy współczynniku ufności 0.99 oraz 0.95

	$1-\alpha = 0.99$			$1-\alpha = 0.95$		
n_2 \ n_1	4	10	30	4	10	30
4	0.691	0.697	0.699	0.672	0.687	0.690
8	0.800	0.819	0.826	0.776	0.809	0.819
10	0.822	0.845	0.854	0.798	0.836	0.849
20	0.843	0.900	0.917	0.842	0.894	0.914
40	0.885	0.928	0.951	0.864	0.925	0.949
60	0.892	0.938	0.963	0.871	0.935	0.962

Z zamieszczonych w tablicy 5 wartości łatwo wywnioskować, że zaproponowana metoda konstrukcji przedziałów ufności jest szczególnie korzystna dla małych prób. W miarę wzrostu liczby stopni swobody długości przedziałów I_{ML} stają się porównywalne z długościami przedziałów I_{ET}. Fakt ten nie oznacza jednak, jak wskazują zawarte w tablicach 1 i 2 prawdopodobieństwa $\alpha_1 = Pr(F < a)$ oraz $\alpha_2 = Pr(F > b)$, że przedziały te dla większych liczb stopni swobody są identyczne. Co prawda wraz ze wzrostem liczby stopni swobody następuje wyrównywanie prawdopodobieństw α_1 i α_2, lecz tendencja ta jest znacznie wolniejsza niż zaobserwowana dla długości przedziałów I_{ML} oraz I_{ET}. Analizując wartości prawdopodobieństw α_1 oraz α_2 można ogólnie stwierdzić, że przedziały o minimalnej długości I_{ML} będą przesunięte na lewo w stosunku do przedziałów tradycyjnych I_{ET} wyznaczanych w oparciu o ten sam zestaw danych.

4. METODA NUMERYCZNA

Proces wyznaczania stałych a oraz b, spełniających warunki optymalności (7), oparto na metodzie iteracyjnej, w której kolejny krok polegał na rozwiązaniu równania nieliniowego

$$f(b) = f(a_*) \tag{10}$$

względem zmiennej b przy ustalonej w kroku poprzednim wartości $a = a_*$ oraz na sprawdzeniu czy tak ustalone stałe a_* i b_* spełniają warunek

$$\left| \int_{a_*}^{b_*} f(t)dt - (1-\alpha) \right| < 10^{-6}. \tag{11}$$

W przypadku niespełnienia warunku (11) modyfikowano stałą a, zwiększając bądź zmniejszając jej wartość w zależności od znaku wyrażenia

$$\int_{a_*}^{b_*} f(t)dt - (1-\alpha) ,$$

i obliczenia powtarzano. Dla wszystkich uwzględnionych w tablicach 1 i 2 kombinacji stopni swobody proces obliczeniowy rozpoczynano przyjmując jako wartość początkową parametru a liczbę dodatnią bliską zeru. Rozwiązanie równania (10) uznano za zadowalające, jeżeli $|f(b_*) - f(a_*)| < 10^{-9}$.

Z uwagi na ściśle malejący przebieg funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(t)$ wtedy, gdy liczba stopni swobody dla mianownika wynosi 2, pierwsze wiersze w tablicach 1 oraz 2 są rozwiązaniami warunku

$$\int_0^b f(t)dt = 1-\alpha .$$

Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej ODRA 1204, w której liczby rzeczywiste są reprezentowane z 37-bitową mantysą. Przy wyznaczaniu prawdopodobieństw $\alpha_1 = Pr(F < a_*)$ oraz $\alpha_2 = Pr(F > b_*)$, a także przy obliczaniu całek związanych z funkcją gęstości rozkładu $\underline{F}$ korzystano ze standardowych algorytmów bibliotecznych.

Autorzy pracy pragną wyrazić podziękowanie drowi L. Konysowi za pomoc w sporządzeniu tablic 1 i 2 oraz drowi Z. Sobkowi za udostępnienie danych eksperymentalnych przedstawionych w punkcie 3.

LITERATURA

Cox, D.R., Hinkley, D.V.(1974). Theoretical statistics. Chapman and Hall, London.

Elandt, R. (1964). Statystyka matematyczna w zastosowaniu do doświadczalnictwa rolniczego. PWN, Warszawa.

Hald, A. (1952). Statistical tables and formulas. Wiley, New York.

Roussas, G.G. (1973). A first course in mathematical statistics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Scheffé, H. (1959). The analysis of variance. Wiley, New York.

Tate, R.F., Klett, G.W. (1959). Optimal confidence intervals for the variance of a normal distribution. J. Amer. Statist. Assoc., 59, 674-682.